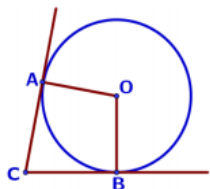


**Комплект билетов по геометрии для выпускников 9 классов**

**Билет № 1**

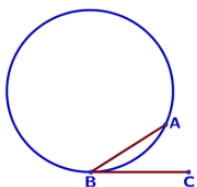
- Углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой и их свойства.
- Треугольник: определение и виды. Теорема косинусов. Теорема синусов (доказательство по выбору учащихся)
- 3.1. Найдите диагонали равнобедренной трапеции, основания которой равны 4 см и 6 см, а боковая сторона равна 5 см.
- 3.2. В угол  $C$  величиной  $83^\circ$  вписана окружность с центром  $O$ , которая касается сторон угла в точках  $A$  и  $B$ . Найдите угол  $AOB$ . Ответ дайте в градусах.



- 3.3. Диагональ  $AC$  параллелограмма  $ABCD$  образует с его сторонами углы, равные  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . Найдите больший угол параллелограмма.
- 4.1. Отрезки  $AB$  и  $DC$  лежат на параллельных прямых, а отрезки  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $M$ . Найдите  $MC$ , если  $AB = 14$ ,  $DC = 42$ ,  $AC = 52$ .
- 4.2. Внутри параллелограмма  $ABCD$  выбрали произвольную точку  $E$ . Докажите, что сумма площадей треугольников  $BEC$  и  $AED$  равна половине площади параллелограмма.

**Билет № 2**

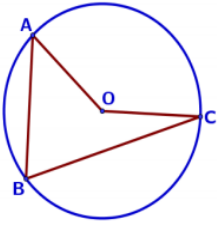
- Смежные и вертикальные углы: определение и свойство.
- Параллелограмм. Формулы площади параллелограмма. Вывод формулы площади параллелограмма (одной по выбору учащегося).
- 3.1. На окружности отмечены точки  $A$  и  $B$  так, что меньшая дуга  $AB$  равна  $66^\circ$ . Прямая  $BC$  касается окружности в точке  $B$  так, что угол  $ABC$  острый. Найдите угол  $ABC$ . Ответ дайте в градусах.



- 3.2. Найдите острый угол параллелограмма  $ABCD$ , если биссектриса угла  $A$  образует со стороной  $BC$  угол, равный  $41^\circ$ . Ответ дайте в градусах.
- 3.3. В треугольнике  $ABC$   $AB = BC = 53$ ,  $AC = 56$ . Найдите длину медианы  $BM$ .
- 4.1. Катеты прямоугольного треугольника равны 18 и 24. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.
- 4.2. Основания  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$  равны соответственно 5 и 20,  $BD = 10$ . Докажите, что треугольники  $CBD$  и  $ADB$  подобны.

### Билет № 3

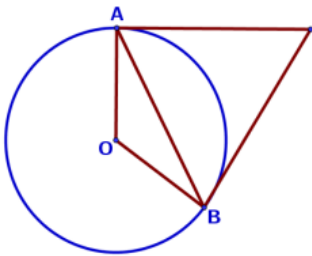
1. Взаимное расположение прямых. Параллельные и перпендикулярные прямые: определение и свойства.
2. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора (доказательство).
- 3.1. Точка  $O$  – центр окружности, на которой лежат точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Известно, что  $\angle ABC = 69^\circ$  и  $\angle OAB = 48^\circ$ . Найдите  $\angle BCO$ . Ответ дайте в градусах.



- 3.2. Биссектриса равностороннего треугольника равна  $13\sqrt{3}$ . Найдите сторону этого треугольника.
- 3.3. В треугольнике  $ABC$   $AC = BC$ . Внешний угол при вершине  $B$  равен  $146^\circ$ . Найдите угол  $C$ . Ответ дайте в градусах.
- 4.1. Прямая, параллельная стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ , пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно. Найдите  $AC$ , если  $BK : KA = 3 : 4$ ,  $KM = 18$ .
- 4.2. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  углы  $BCA$  и  $BDA$  равны. Докажите, что углы  $ABD$  и  $ACD$  также равны.

### Билет № 4

1. Треугольник: определение и виды. Равные треугольники (определение). Признаки равенства треугольников.
2. Трапеция: определение и виды. Вывод формулы площади трапеции.
- 3.1. Касательные в точках  $A$  и  $B$  к окружности с центром  $O$  пересекаются под углом  $56^\circ$ . Найдите угол  $ABO$ . Ответ дайте в градусах.



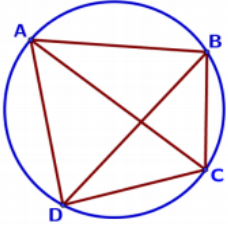
- 3.2. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = BC$ ,  $\angle ABC = 108^\circ$ . Найдите угол  $BCA$ . Ответ дайте в градусах.

- 3.3. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AC = 15$ ,  $\cos A = \frac{5}{7}$ . Найдите  $AB$ .

- 4.1. Точка  $H$  является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла  $B$  треугольника  $ABC$  к гипотенузе  $AC$ . Найдите  $AB$ , если  $AH = 6$ ,  $AC = 24$ .
- 4.2. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, делит её на две равные по площади части.

### Билет № 5

1. Параллелограмм: определение, свойства и признаки.
2. Теорема Фалеса (доказательство).
- 3.1. В равностороннем треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BD$ . Найдите углы треугольника  $ABD$ .
- 3.2. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $ABD$  равен  $51^\circ$ , угол  $CAD$  равен  $42^\circ$ . Найдите угол  $ABC$ . Ответ дайте в градусах.



- 3.3. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  катет  $AC = 35$ , а высота  $CH$ , опущенная на гипотенузу, равна  $14\sqrt{6}$ . Найдите  $\sin \angle ABC$ .
- 4.1. Прямая, параллельная основаниям трапеции  $ABCD$ , пересекает её боковые стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Найдите длину отрезка  $EF$ , если  $AD = 42$ ,  $BC = 14$ ,  $CF : DF = 4 : 3$ .
- 4.2. Известно, что около четырёхугольника  $ABCD$  можно описать окружность и что продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  четырёхугольника пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что треугольники  $MBC$  и  $MDA$  подобны.

### Билет № 6

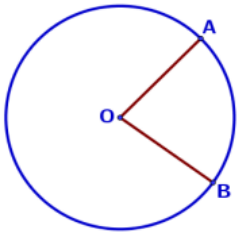
1. Вектор. Длина (модуль) вектора. Координаты вектора. Равенство векторов.
2. Равнобедренный треугольник. Свойство медианы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию (доказательство).
- 3.1. В остроугольном равнобедренном треугольнике угол между основанием и высотой, проведенной к боковой стороне, равен  $34^\circ$ . Найдите углы этого треугольника.
- 3.2. Один угол параллелограмма в два раза больше другого. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.
- 3.3. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 12 и 13.
- 4.1. Найдите боковую сторону  $AB$  трапеции  $ABCD$ , если углы  $ABC$  и  $BCD$  равны соответственно  $60^\circ$  и  $135^\circ$ , а  $CD = 36$ .
- 4.2. Высоты  $AA_1$  и  $BB_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что углы  $AA_1E$  и  $BB_1E$  равны.

### Билет № 7

1. Прямоугольник: определение и свойства.
2. Средняя линия треугольника. Теорема о средней линии треугольника (доказательство).
  - 3.1. Найдите сторону ромба, если известно, что его диагонали равны 24 см и 32 см.
  - 3.2. Разность углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна  $40^\circ$ . Найдите меньший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.
  - 3.3. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AC = 15$ ,  $\cos A = \frac{5}{7}$ . Найдите  $AB$ .
- 4.1. Биссектрисы углов  $A$  и  $D$  параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке, лежащей на стороне  $BC$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 44$ .
- 4.2. Точка  $E$  — середина боковой стороны  $AB$  трапеции  $ABCD$ . Докажите, что площадь треугольника  $ECD$  равна половине площади трапеции.

### Билет № 8

1. Ромб: определение и признаки.
2. Треугольник: определение и виды. Теорема о сумме углов треугольника (доказательство).
  - 3.1. На окружности с центром  $O$  отмечены точки  $A$  и  $B$  так, что  $\angle AOB = 80^\circ$ . Длина меньшей дуги  $AB$  равна 58. Найдите длину большей дуги.



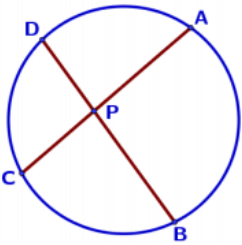
- 3.2. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Найдите гипотенузу этого треугольника.
- 3.3. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен  $23^\circ$ . Найдите его другой острый угол. Ответ дайте в градусах.
- 4.1. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 15, а одна из диагоналей ромба равна 60. Найдите углы ромба.
- 4.2. Биссектрисы углов  $A$  и  $D$  параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$  стороны  $BC$ . Докажите, что  $E$  — середина  $BC$ .

### Билет № 9

1. Внешний угол треугольника: определение и свойство.
2. Ромб. Свойства диагоналей ромба (доказательство одного из них по выбору учащегося).
- 3.1. Найдите число сторон выпуклого многоугольника, сумма внутренних углов которого равна  $4320^\circ$ .
- 3.2. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AC = 15$ ,  $BC = 5\sqrt{7}$ , угол  $C$  равен  $90^\circ$ . Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.
- 3.3. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна  $140^\circ$ . Найдите больший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.
- 4.1. Высота  $AH$  ромба  $ABCD$  делит сторону  $CD$  на отрезки  $DH = 8$  и  $CH = 2$ . Найдите высоту ромба.
- 4.2. В треугольнике  $ABC$  с тупым углом  $ACB$  проведены высоты  $AA_1$  и  $BB_1$ . Докажите, что треугольники  $A_1CB_1$  и  $ACB$  подобны.

### Билет № 10

1. Подобные треугольники (определение). Признаки подобия треугольников.
2. Теорема о сумме углов выпуклого  $n$ -угольника (доказательство).
- 3.1. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе прямоугольного треугольника, если известно, что его катеты равны 8 см и 6 см.
- 3.2. Найдите меньший угол равнобедренной трапеции, если два ее угла относятся как 1:2. Ответ дайте в градусах.
- 3.3. Хорды  $AC$  и  $BD$  окружности пересекаются в точке  $P$ ,  $BP=15$ ,  $CP=6$ ,  $DP=10$ . Найдите  $AP$ .



- 4.1. Биссектрисы углов  $A$  и  $B$  при боковой стороне  $AB$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $F$ . Найдите  $AB$ , если  $AF = 24$ ,  $BF = 10$ .
- 4.2. В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  диагонали пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что площади треугольников  $AOB$  и  $COD$  равны.

### Билет № 11

1. Медиана, биссектриса и высота треугольника: определения и свойства.
2. Ромб. Вывод формулы площади ромба.
- 3.1. В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса 4 см. Найдите периметр этого треугольника, если известно, что его гипотенуза равна 26 см.
- 3.2. Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Диагональ трапеции делит среднюю линию на два отрезка. Найдите длину большего из них.
- 3.3. Площадь параллелограмма равна 54, а две его стороны равны 9 и 18. Найдите его высоты. В ответе укажите большую высоту.
- 4.1. Отрезки  $AB$  и  $CD$  являются хордами окружности. Найдите длину хорды  $CD$ , если  $AB = 10$ , а расстояния от центра окружности до хорд  $AB$  и  $CD$  равны соответственно 12 и 5.
- 4.2. Докажите, что медиана треугольника делит его на два треугольника, площади которых равны между собой.

### Билет № 12

1. Синус и косинус острого угла прямоугольного треугольника: определение, значения некоторых углов ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$ ).
2. Равнобедренный треугольник. Свойство углов при основании равнобедренного треугольника и признак равнобедренного треугольника (доказательство по выбору учащихся).
- 3.1. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AC=15$ ,  $\cos A = \frac{5}{7}$ . Найдите  $AB$ .
- 3.2. Найдите угол  $ADC$  равнобедренной трапеции  $ABCD$ , если диагональ  $AC$  образует с основанием  $BC$  и боковой стороной  $AB$  углы, равные  $30^\circ$  и  $40^\circ$  соответственно.
- 3.3. Сторона  $AC$  треугольника  $ABC$  проходит через центр описанной около него окружности. Найдите  $\angle C$ , если  $\angle A = 44^\circ$ . Ответ дайте в градусах.
- 4.1. Углы  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  равны соответственно  $71^\circ$  и  $79^\circ$ . Найдите  $BC$ , если радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , равен 8.
- 4.2. Окружности с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , причём точки  $O_1$  и  $O_2$  лежат по одну сторону от прямой  $AB$ . Докажите, что  $AB$  и  $O_1O_2$  перпендикулярны.

### Билет № 13

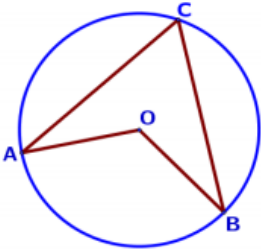
1. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов: определение и свойства.
2. Формулы площади треугольника. Вывод формулы площади треугольника через две стороны и угол между ними.
  - 3.1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ ,  $\angle BAC = 37^\circ$ . Найдите угол  $ABH$ . Ответ дайте в градусах.
  - 3.2. К окружности с центром в точке  $O$  проведены касательная  $AB$  и секущая  $AO$ . Найдите радиус окружности, если  $AB = 12$  см,  $AO = 13$  см.
  - 3.3. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 14 и 6.
- 4.1. Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся, как 6:7:23. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон треугольника равна 12.
- 4.2. Биссектрисы углов  $B$  и  $C$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ , лежащей на стороне  $AD$ . Докажите, что точка  $O$  равноудалена от прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ .

### Билет № 14

1. Тангенс острого угла прямоугольного треугольника: определение, значения некоторых углов ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$ ).
2. Центральные и вписанные углы. Свойство вписанного угла окружности (доказательство).
  - 3.1. Точки  $A$  и  $B$  делят окружность на две дуги, длины которых относятся как 9:11. Найдите величину центрального угла, опирающегося на меньшую из дуг. Ответ дайте в градусах.
  - 3.2. Периметр ромба равен 40, а один из углов равен  $30^\circ$ . Найдите площадь ромба.
  - 3.3. Точки  $M$  и  $N$  являются серединами сторон  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ , сторона  $AB$  равна 26, сторона  $BC$  равна 39, сторона  $AC$  равна 48. Найдите  $MN$ .
- 4.1. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон в точках  $M$ ,  $K$  и  $P$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если углы треугольника  $MKP$  равны  $56^\circ$ ,  $57^\circ$  и  $67^\circ$ .
- 4.2. Через точку  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$  проведена прямая, пересекающая стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $P$  и  $T$  соответственно. Докажите, что  $BP = DT$ .

### Билет № 15

1. Окружность (определение). Центр, радиус, хорда, диаметр окружности. Взаимное расположение окружности и прямой. Касательная к окружности: определение и свойства.
2. Трапеция. Средняя линия трапеции. Свойство средней линии трапеции (доказательство).
- 3.1. В равностороннем треугольнике проведены две медианы. Найдите величину острого угла, образовавшегося при их пересечении.
- 3.2. Точка  $O$  — центр окружности,  $\angle AOB = 118^\circ$  (см. рисунок). Найдите величину угла  $ACB$  (в градусах).



- 3.3. Диагональ прямоугольника образует угол  $70^\circ$  с одной из его сторон. Найдите острый угол между диагоналями этого прямоугольника. Ответ дайте в градусах.
- 4.1. Точка  $H$  является основанием высоты  $BH$ , проведенной из вершины прямого угла  $B$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Окружность с диаметром  $BH$  пересекает стороны  $AB$  и  $CB$  в точках  $P$  и  $K$  соответственно. Найдите  $PK$ , если  $BH = 14$ .
- 4.2. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $D$  и  $E$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  равны. Оказалось, что отрезки  $BD$  и  $BE$  тоже равны. Докажите, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный.